

Chapitre 2 Déterminants

Exercice 1 : Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i & i & 1 \\ i & 0 & 1 & -1 \\ i & i & i & 1 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer les déterminants suivants.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

Exercice 3 : Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 4 : Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$M_a = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad N_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & a^2 - a \\ 1 & a - 1 & 2a - 1 & a^2 - a \\ 0 & a & a & 0 \\ 1 & a & 3a - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le déterminant de taille $n \times n$ suivant.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
3. Calculer Δ_4 et Δ_5 . Conjecturer une expression pour Δ_n .
4. Démontrer la conjecture précédente.

Exercice 6 : Pour $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 7 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq 1.$$

Montrer par récurrence sur n que $|\det(A)| \leq 1$.

2. En déduire l'inégalité

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Exercice 8 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que si n est impaire, alors M n'est pas inversible.

Exercice 9 : Déterminer les réels $t \in \mathbb{R}$ tels que la famille

$$\mathcal{F}_t = ((t, 1, 1), (1, t, 1), (1, 1, t))$$

est une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 10 : A quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la famille

$$\mathcal{F}_{a,b,c} = ((X - a)^2, (X - b)^2, (X - c)^2)$$

est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 11 : Soit E un espace vectoriel admettant une base (v_1, v_2, v_3, v_4) notée \mathcal{B} . On note $w = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$. Pour quelle valeur de $t \in \mathbb{K}$, la famille

$$\mathcal{F}_t = (v_1 + tw, v_2 + tw, v_3 + tw, v_4 + tw)$$

est-elle une base de E ?

Exercice 12 : Calculer le déterminant de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer si u est un isomorphisme dans chacun des cas suivants.

$$(i) \quad u(x, y, z) = (x + y + z, x + z, y + z), \quad (ii) \quad u(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x).$$

Exercice 13 : Calculer le déterminant de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ et déterminer si u est un isomorphisme dans chacun des cas suivants.

$$(i) \quad u(P) = P + P', \quad (ii) \quad u(P) = P(X+1) - P(X), \quad (iii) \quad u(P) = XP' + P(1).$$

Exercice 14 : On considère une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

ainsi que l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $\varphi(M) = AM$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Exprimer le déterminant de φ en fonction de celui de A .
4. En déduire que φ est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.

Exercice 15 : Soit E un espace de dimension finie sur \mathbb{R} . Montrer que s'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}$, alors la dimension de E est paire.

Exercice 16 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E tel que toutes les colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sauf la dernière soient nulles.
2. En déduire que $\det(u + \text{Id}) = 1 + \text{Tr}(u)$.

Exercice 17 : Soit E un espace de dimension finie et soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.

1. Écrire la matrice de s dans une base adaptée à $E = \text{Ker}(s - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id})$.
2. Exprimer le déterminant de s en fonction de la dimension de $\text{Ker}(s + \text{Id})$.